Existenţa şi unicitatea soluţiilorsistemelor de ecuaţii diferenţiale neliniare

Majoritatea sistemelor neliniare ale ecuațiilor diferențiale sunt imposibil de rezolvat analitic. Un motiv ar fi că pur și simplu nu avem suficiente funcții cu nume specifice pe care putem utiliza pentru a scrie soluții explicite ale acestor sisteme. La fel de problematic este faptul că, după cum vom vedea, pot apărea sisteme superioare dimensionale comportamentul haotic, o proprietate care face să se cunoască o soluție explicită în esență, lipsit de valoare în schema mai largă de înțelegere a comportamentului sistem. Prin urmare, suntem nevoiți să recurgem la diferite mijloace pentru a înțelege aceste sisteme. Acestea sunt tehnicile care apar în domeniul sistemelor dinamice. Vom folosi o combinație de tehnici: analiză, geometrică și topologică, pentru a obține rezultate riguroase cu privire la comportamentul soluțiilor din aceste ecuații.

Un sistem este o modalitate de a descrie trecerea în timp a tuturor punctelor dat de spațiu *S*. Spațiul *S* ar putea fi gândit, de exemplu, ca spațiul unui anumit sistem fizic. Matematic, *S* ar putea fi un spațiu euclidian, un subset deschis de spațiu euclidian sau alt spațiu, cum ar fi o suprafață din . Când luăm în considerare sistemele dinamice care apar în mecanică, spațiul S este setul de posibile poziții și viteze ale sistemului. Vom presupune că spațiul *S* este spațiul Euclidian , în anumite cazuri comportamentul dinamic important va fi limitat la un anumit subset al lui .

Având o poziție inițială *X ∈* , un sistem dinamic pe ne poate spune unde se află 1 unitate de timp mai târziu, 2 unități de timp mai târziu, și așa mai departe. Indicăm noi poziții ale lui *X* cu , și așa mai departe. La momentul zero, *X* este poziționat . O unitate înainte de timpul zero, *X* era la *X-1*. În general, "traiectoria" lui *X* este dată de . Dacă măsuram pozițiile folosind doar valorile de timp, avem un exemplu al unui sistem dinamic discret. Dacă timpul este măsurat continuu cu *t ∈ R*, avem un sistem dinamic continuu. Dacă sistemul depinde de timp în mod continuu diferențiat, avem un sistem dinamic neted. Acestea sunt cele trei tipuri principale de sisteme dinamice care apar în sistemele de ecuații diferențiale și care vor forma coloana vertebrală.

Funcția care ia t la dă o secvență de puncte, fie o curbă care reprezintă istoricul de viață al lui *X*, pe măsură ce timpul trece de la *-∞* la *∞*. Diferite ramuri ale sistemelor dinamice fac presupuneri diferite despre funcția care depinde de *t*. De exemplu, teoria ergodică se ocupă de funcții, presupunând că ei păstrează o măsură pe . Dinamica topologică se ocupă de astfel de funcții, presupunând că variază numai în mod continuu. În cazul ecuațiilor diferențiale, vom presupune că funcția este continuu diferențiată. Harta care ia *X* în este definit pentru fiecare *t* și pentru interpretarea lui ca a unei stari care se deplasează în timp, este rezonabil să ne așteptăm la care are ca invers. De asemenea, ar trebui să fie funcția de identitate *(X) = X* și ( (X)) = (X) este, de asemenea, o condiție naturală. Formalizăm toate astea în următoarea definiție:

Un sistem dinamic neted pe este o funcție continuă diferențiată φ: R × → unde φ (t, X) = (X) satisfice:

1. este functia identitate: *(X) = X*
2. Ccompozitia ◦ = penru fiecare *t, s ∈ R*

Amintiți-vă că o funcție poate fi diferențiată continuu dacă toate derivatele sale parțiale sunt continue în întreaga sa domeniu. Este tradițional să numim o funcție continuă diferențiabilă a unei funcții . Dacă funcția este *k* ori continuă să fie diferențiată, se numește o funcție . Rețineți că definiția de mai sus implică faptul că harta este pentru fiecare *t* și are un inversat .

Ne întoarcem acum la teorema fundamentală a ecuațiilor diferențiale, teorema unicității. Luați în considerare sistemul de diferențieri

unde . Reamintim că o soluție a acestui sistem este o funcție definită pe un interval *J ⊂ R* astfel încât, pentru toate *t ∈ J*,

Geometric, *X (t)* este o curbă în a cărui vector tangent *X (t)* există pentru toate *t ∈ J* și este egal cu *F (X (t))*. Ca și în capitolele anterioare, ne gândim la acest vector ca fiind bazat la *X (t)*, astfel încât harta să definească un câmp vectorial pe . O condiție inițială sau o valoare inițială pentru o soluție este o specificație a formei X () = unde ∈ J și ∈ . Pentru simplitate, luăm de obicei = 0. Principala problemă în ecuațiile diferențiale este găsirea soluției oricărei probleme de valoare inițială; adică pentru a determina soluția sistemului care satisface condiția inițială X (0) = pentru fiecare ∈ .

Din nefericire, ecuatiile diferentiale neliniare pot sa nu aibe nici o solutie care sa satisfaca conditiile initiale.

**Teorema existenței și unicității.** Luați în considerare problema inițială a valorii

unde, ∈ . Să presupunem că este . Apoi, în primul rând, există o soluție a acestei probleme de valoare inițială și, în al doilea rând, aceasta este singura soluție. Mai exact, există o a> 0 și o soluție unică

din această ecuație diferențială care satisface condiția inițială *X () =* .

Dovada acestei teoreme depinde de o tehnică importantă cunoscută sub numele de iterație Picard. Ideea de bază din spatele acestui proces iterativ este de a construi o secvență de funcții care converge la soluția ecuației diferențiale. Secvența funcțiilor (t) este definită inductiv de (t) = unde este condiția inițială dată și apoi

**Teoremă.** Fie U ⊂ un set deschis și lăsați să fie . Fie *X (t)* o soluție de definită pe un interval maxim deschis *J = (α, β) ⊂ R* cu *β <∞*. Apoi, având orice set închis și limitat *K ⊂ U*, există unele *t ∈ (α, β)* cu *X (t) ∈ K*.

Aceasta teorema ca daca o solutie *X(t)* nu poate fi exinsa pe un interval, atunci acesta solutie lasă orice set închis și limitat în *U*. Asta iplica că *X (t)* trebuie să vină în mod arbitrar aproape de limita *U* ca *t → β*. Rezultate similare pentru *t → α*.